FASE COMARCAL
PROBLEMAS PROPUESTOS Y SOLUCIONES

Soluciones 6.^{o} *de Primaria*

PROBLEMA 1

a. Los años del siglo XIII tienen como unidad de millar y centenas las cifras 1 y 2, respectivamente. Puesto que el año de nacimiento es capicúa, es el **1221**.

b. Analizamos las distintas posibilidades:
1221: no puede ser, porque es el año de su nacimiento (y sus cifras no suman 10).
1232: tampoco es el año solicitado, porque sus cifras no suman 10.
1243. Es el correcto porque cumple con las *pistas* facilitadas.

c. Fue nombrado rey en el **1252**, ya que los únicos números primos divisores de 10 de una cifra son el 2 y el 5 (recordemos que un número primo es un número distinto de 1 y que sólo es divisible por 1 y por él mismo). Y no pudo ser en el 1225, porque la conquista de Murcia la había llevado a cabo cuando aún no era rey.

d. Las potencias de 2 de una sola cifra son: 2, 4 y 8. El número que cumple con las condiciones facilitadas es el **1284**. No pudo fallecer en el 1248, puesto que en 1252 fue nombrado rey.

PROBLEMA 2

a. Tenemos que buscar 4 números distintos de cero que sumen 8. Podemos distribuir las 8 monedas de la siguiente manera:

$$\begin{gathered} 1+1+1+5=8 \\ 1+1+2+4=8 \\ 1+1+3+3=8 \\ 1+2+2+3=8 \\ 2+2+2+2=8 \end{gathered}$$

b. Como en el apartado anterior, se trata de conseguir el número ocho como suma de tres, dos o un solo sumando.

Con 1 monedero vacío	**Con 2 monederos vacíos**	**Con 3 monederos vacíos**
$1+1+6$	$1+7$	8
$1+2+5$	$2+6$	
$1+3+4$	$3+5$	
$2+2+4$	$4+4$	
$2+3+3$		

PROBLEMA 3

Apartado A

Si las dos copas de vino las pagan aparte Conchi y Ramón, la comida de los tres sale por 38 €. En total, se han gastado (sin contar el vino) $7+38+12 = 57$ €, lo que supone 19 € por persona.
Liquidación:

Amigos	**Gasto por persona**	**Dinero aportado**	**Dinero a devolver a Ramón**
Conchi	$19 + 7 = 26$ €	7 €	$26 - 7 = 19$ €
Ramón	$19 + 7 = 26$ €	52 €	
Caridad	19 €	12 €	$19 - 12 = 7$ €
Total	71	71	

Así pues, Ramón recibirá 26 €, 19 € de Conchi y 7 € de Caridad, que sumados a los 26 € que se ha gastado hacen un total de 52 €, la misma cantidad que él ha pagado.

Apartado B

Se han comprado en total 7 artículos (5 paquetes de café y 2 paquetes de perlas de chocolate) por 75 €, puesto que les han regalado los 2 paquetes de perlas de chocolate. Calculamos el precio por artículo: $75 : 7 = 10$ €. Nos faltarían 5 € para pagar los 75 € que cuesta la compra.

Como los paquetes de café son más caros que los de perlas de chocolate, podría solucionarse pagando a un euro más cada paquete de café. Así, los que han comprado café pagarían 11 € y el que ha comprado los 2 paquetes de perlas de chocolate pagaría 20 €.

Otra posible solución:

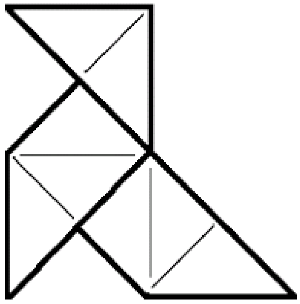
Como son 6 personas, podemos comenzar por dividir $75 : 6 = 12$ €. Nos faltarían otros 3 € para pagar los 75 € que cuesta la compra.
Como quien compra los dos paquetes de chocolate tendría que pagar 26 €, frente a los 15 € que tendrían que pagar cada uno de los otros cinco colegas, pueden decidir que quien compra café pague 12 € y quien compra los dos paquetes de perlas de chocolate pague 15 €.

En cualquier caso, esta última solución no es la óptima, ya que se aleja más de la cantidad exacta que les correspondería pagar ($11,14$ € a quienes compran un paquete de café y $19,31$ € a quien compra los dos chocolates) que la primera solución que se ha dado.

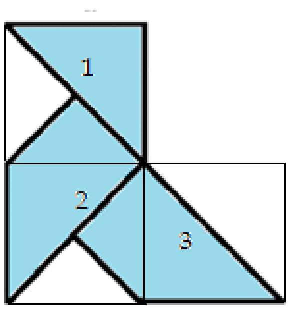
PROBLEMA 4

Apartado A

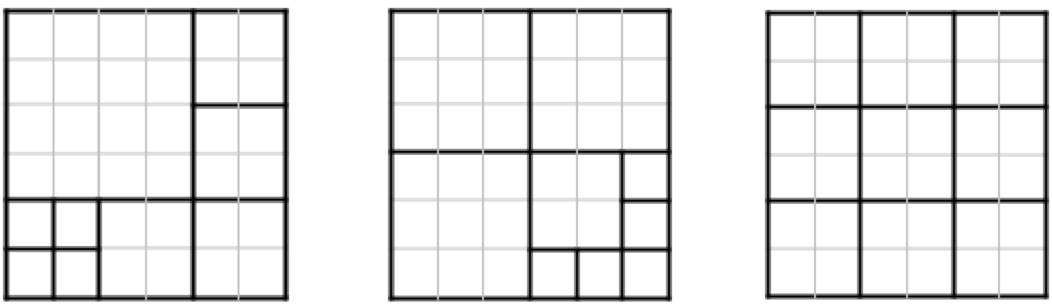
Una manera de resolver el problema es considerar que la superficie de la pajarita es equivalente a dos cuadrados iguales a los que se les ha extraído un cuarto a cada uno, para formar la cola. Luego el área mide 2 dm^2.



También podemos calcular su área considerando tres cuadrados iguales, de 1 dm^2 de superficie. La superficie de la parte coloreada de los cuadrados 1 y 2 es $\frac{3}{4}$ de 1 dm^2 y la del cuadrado 3 es $\frac{1}{2}$ de 1 dm^2, por tanto, la superficie total es 2 dm^2.



Apartado B



(En 2.º de ESO se pide razonar por qué no hay más posibilidades. En las soluciones se explica la razón).

PROBLEMA 5

a. Los números de las papeletas van desde el 0000 hasta el 9999, por tanto, hay 10 000 papeletas diferentes.
Una papeleta puede acabar en cualquiera de los números del 0 al 9, por tanto, la décima parte (que son 1000 papeletas) acabarán en el mismo número que haya salido premiado. Igualmente, la décima parte de las papeletas (que son 1000 papeletas) comenzarán por la misma cifra que el número premiado.

Eso sí, hay que tener en cuenta que hay papeletas que comienzan y acaban igual que el número premiado, exactamente 100, cuyas cifras centrales pueden ir desde 00 hasta 99. Y esas las estaríamos contando dos veces. Así que serán

$$1000 + 1000 - 100 = 1900$$

papeletas las que tendrán, como mínimo, la devolución del dinero.

Hay que tener en cuenta, además, que el número anterior y el número posterior al premiado, ya estarían contados, porque comienzan por la misma cifra.

b. Ahora se trata de ver quiénes tendrán un premio, no sólo la devolución.

Tienen premio todas aquellas papeletas cuyas dos últimas cifras coincidan con las del número premiado (aquellas papeletas en las que coincidan las tres o las cuatro últimas cifras estarían incluidas en este grupo). Eso son 100 papeletas (las dos cifras iniciales pueden estar desde 00 y 99).

Y hay que contar también el número anterior y el posterior (acaban en una cifra diferente a la del número premiado, así que no están entre las cien anteriores). Por tanto, serán $100 + 2 = 102$ papeletas las que tendrán premio.

Soluciones 2.^{o} de ESO

PROBLEMA 1

a. Los años del siglo XIII tienen como unidad de millar y centenas las cifras 1 y 2, respectivamente. Puesto que el año de nacimiento es capicúa, es el **1221**.

b. Analizamos las distintas posibilidades:
1221: no puede ser, porque es el año de su nacimiento (y sus cifras no suman 10).
1232: tampoco es el año solicitado, porque sus cifras no suman 10.
1243. Es el correcto porque cumple con las *pistas* facilitadas.

c. Fue nombrado rey en el **1252**, ya que los únicos números primos divisores de 10 de una cifra son el 2 y el 5 (recordemos que un número primo es un número distinto de 1 y que sólo es divisible por 1 y por él mismo). Y no pudo ser en el 1225, porque la conquista de Murcia la había llevado a cabo cuando aún no era rey.

d. Las potencias de 2 de una sola cifra son: 2, 4 y 8. El número que cumple con las condiciones facilitadas es el **1284**. No pudo fallecer en el 1248, puesto que en 1252 fue nombrado rey.

e. El número que buscamos tiene como cifra de las centenas el 4. Para que sea múltiplo de 6, ha de ser múltiplo de 2 y de 3 y otra condición es que la suma de sus cifras ha de ser inferior a 18.
Analizamos las distintas posibilidades:

Cifra de las centenas	**Cifra de las unidades**	**Cifra de las decenas** $(u+2)$	**Explicación**
4	8	10	No cumplen la condición 2.^{a}
4	6	8	No cumplen la condición 4.^{a}
4	4	6	No cumplen la condición 3.^{a}
4	2	4	No cumplen la condición 3.^{a}
4	0	2	Se cumplen todas las condiciones.

Además, la suma de sus cifras ha de ser inferior a 18. Por tanto, el número de cantigas es: **420** (el número 486 cumple todas las condiciones excepto la última, ya que la suma de sus cifras es igual a 18).

PROBLEMA 2

a. Tenemos que buscar 4 números distintos de cero que sumen 10. Podemos distribuir las 10 monedas de la siguiente manera:

$$\begin{gathered}1+1+1+7\\1+1+2+6\\1+1+3+5\\1+1+4+4\\1+2+2+5\\1+2+3+4\\1+3+3+3\\2+2+2+4\\2+2+3+3\end{gathered}$$

b. Como en el apartado anterior, se trata de conseguir el número 10 como suma de tres, dos o un solo sumando.

Con 1 monedero vacío	**Con 2 monederos vacíos**	**Con 3 monederos vacíos**
$1+1+8$	$1+9$	10
$1+2+7$	$2+8$	
$1+3+6$	$3+7$	
$1+4+5$	$4+6$	
$2+2+6$	$5+5$	
$2+3+5$		
$2+4+4$		
$3+3+4$		

PROBLEMA 3

Apartado A

Si las dos copas de vino las pagan aparte Conchi y Ramón, la comida de los tres sale por 38 €. En total, se han gastado (sin contar el vino) $7+38+12=57$ €, lo que supone 19 € por persona.
Liquidación:

Amigos	**Gasto por persona**	**Dinero aportado**	**Dinero a devolver a Ramón**
Conchi	$19+7=26$ €	7 €	$26-7=19$ €
Ramón	$19+7=26$ €	52 €	
Caridad	19 €	12 €	$19-12=7$ €
Total	71	71	

Así pues, Ramón recibirá 26 €, 19 € de Conchi y 7 € de Caridad, que sumados a los 26 € que se ha gastado hacen un total de 52 €, la misma cantidad que él ha pagado.

Apartado B

a. Apartado B

Se han comprado en total 7 artículos (5 paquetes de café y 2 paquetes de perlas de chocolate) por 75 €, puesto que les han regalado los 2 paquetes de perlas de chocolate. Calculamos el precio por artículo: $75:7=10$ €. Nos faltarían 5 € para pagar los 75 € que cuesta la compra.

Como los paquetes de café son más caros que los de perlas de chocolate, podría solucionarse pagando a un euro más cada paquete de café. Así, los que han comprado café pagarían 11 € y el que ha comprado los 2 paquetes de perlas de chocolate pagaría 20 €.

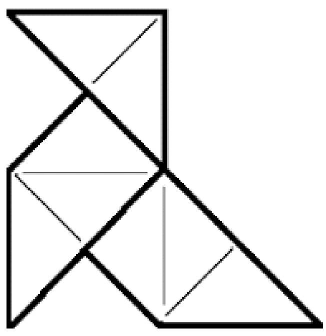
Otra posible solución:

Como son 6 personas, podemos comenzar por dividir $75 : 6 = 12$ €. Nos faltarían otros 3 € para pagar los 75 € que cuesta la compra.
Como quien compra los dos paquetes de chocolate tendría que pagar 26 €, frente a los 15 € que tendrían que pagar cada uno de los otros cinco colegas, pueden decidir que quien compra café pague 12 € y quien compra los dos paquetes de perlas de chocolate pague 15 €.

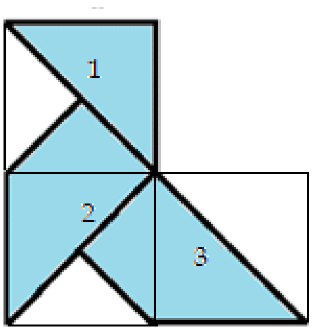
En cualquier caso, esta última solución no es la óptima, ya que se aleja más de la cantidad exacta que les correspondería pagar ($11,14$ € a quienes compran un paquete de café y $19,31$ € a quien compra los dos chocolates) que la primera solución que se ha dado.

PROBLEMA 4

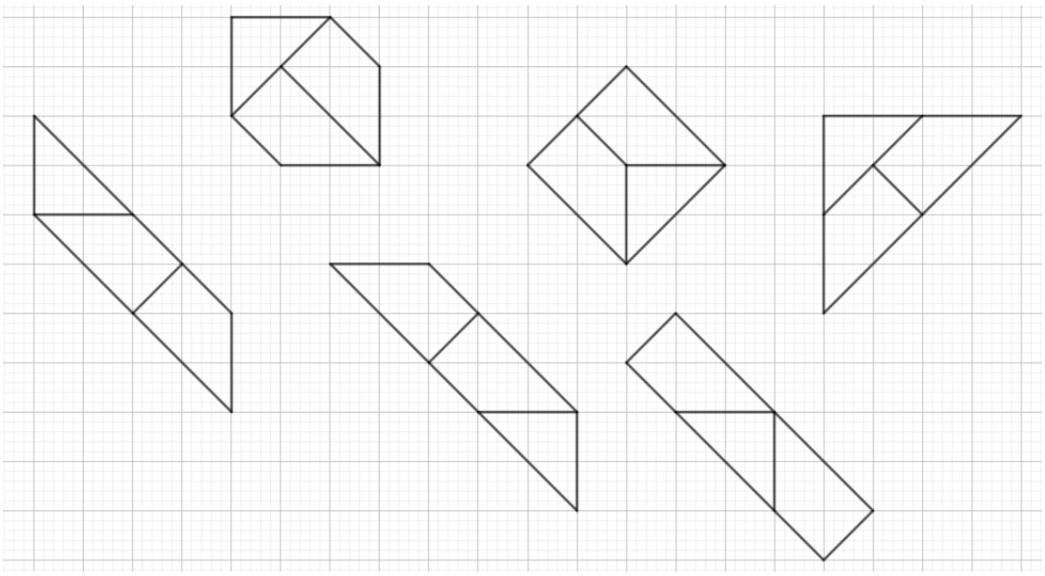
a. Una manera de resolver el problema es considerar que la superficie de la pajarita es equivalente a dos cuadrados iguales a los que se les ha extraído un cuarto a cada uno, para formar la cola. Luego el área mide 2 dm^2.



También podemos calcular su área considerando tres cuadrados iguales, de 1 dm^2 de superficie. La superficie de la parte coloreada de los cuadrados 1 y 2 es $\frac{3}{4}$ de 1 dm^2 y la del cuadrado 3 es $\frac{1}{2}$ de 1 dm^2, por tanto, la superficie total es 2 dm^2.



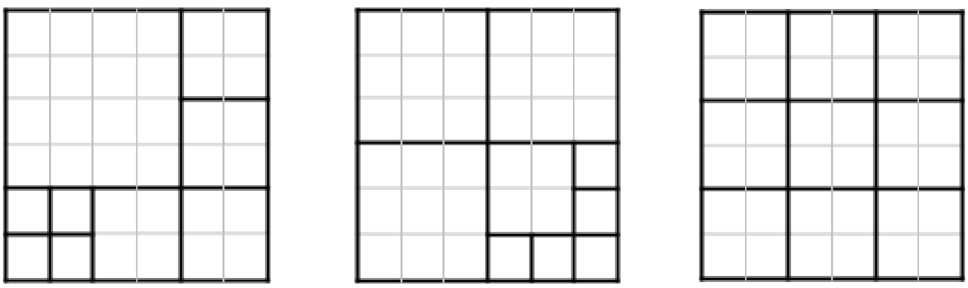
b. Con las tres piezas de la pajarita podemos formar los siguientes polígonos:



De izquierda a derecha y de arriba abajo: paralelogramo, hexágono, cuadrado, triángulo isósceles y rectángulo, trapecio isósceles , rectángulo.

PROBLEMA 5

a. Para dividir el cuadrado con la condición pedida, hay exactamente 3 posibilidades:



b. El cuadrado inicial mide $6\,x\,6 = 36$ cuadrados de lado 1. Y hay que dividirlo en cuadrados de lados enteros. Los cuadrados perfectos menores que 36 son: 1, 4, 9, 16 y 25. Entonces, basta ver de qué manera podemos combinar los números anteriores para que su suma sea 36. Sólo hay estas descomposiciones en 9 sumandos que sean cuadrados perfectos:

a) $36 = 25 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
b) $36 = 16 + 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1$
c) $36 = 9 + 9 + 9 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
d) $36 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$

La primera de ellas no es posible, porque si dividimos el cuadrado inicial en un cuadrado de lado 5, ya sólo nos caben cuadrados de lado 1, no podríamos obtener uno de lado 2.
Por tanto, podemos afirmar que las únicas maneras de hacer la partición pedida son las tres últimas.

PROBLEMA 6

a. Los números de las papeletas van desde el 0000 hasta el 9999, por tanto, hay 10 000 papeletas diferentes. Una papeleta puede acabar en cualquiera de los números del 0 al 9, por tanto, la décima parte (que son 1000 papeletas) acabarán en el mismo número que haya salido premiado. Igualmente, la décima parte de las papeletas (que son 1000 papeletas) comenzarán por la misma cifra que el número premiado.

Eso sí, hay que tener en cuenta que hay papeletas que comienzan y acaban igual que el número premiado, exactamente 100, cuyas cifras centrales pueden ir desde 00 hasta 99. Y esas las estaríamos contando dos veces. Así que serán, de momento:

$$1000 + 1000 - 100 = 1900$$

papeletas las que tendrán, como mínimo, la devolución del dinero.

Pero también tienen premio las papeletas cuyas dos cifras centrales coinciden con las del número premiado. Si consideramos de entre estas sólo las que no empiezan ni acaban igual que el número premiado (porque ya las hemos contado), tenemos $9\,x\,9 = 81$ posibilidades más, lo que hace un total de **1981** posibilidades.

Hay que tener en cuenta, además, que el número anterior y el número posterior al premiado, ya estarían contados, porque comienzan por la misma cifra.

Como nos pide la probabilidad de recuperar nuestro dinero y eso ocurre con 1981 de las 10000 papeletas, la probabilidad es $\dfrac{1981}{10000}$

b. Ahora se trata de ver quiénes tendrán un premio, no sólo la devolución.

Tienen premio todas aquellas papeletas cuyas dos últimas cifras coincidan con las del número premiado (aquellas papeletas en las que coincidan las tres o las cuatro últimas cifras estarían incluidas en este grupo). Eso son 100 papeletas (las dos cifras iniciales pueden estar entre 00 y 99).

También tienen premio las papeletas cuyas dos cifras centrales coincidan con las del número premiado. Si consideramos las que no acaban igual que el número premiado, para no contarlas de nuevo, tenemos $10\,x\,9 = 90$ posibilidades más.

Las papeletas cuya primera y última cifra coincidan con las del número premiado, serían 100 pero ya habríamos contado aquellas que tuvieran la cifra de las decenas coincidente con la del premio, con lo que quedan otras 90.

En cuanto a los dos números anterior y posterior al del premio, tendrían iguales las dos cifras centrales, por lo que ya las hemos contado.

De modo que las papeletas con premio son $100 + 90 + 90 = \mathbf{280}$

Luego la probabilidad de tener un premio es $\dfrac{280}{10000} = \dfrac{7}{250}$ (No llega a una posibilidad entre 35).